重點四　二元二次圖形的判別與標準化

1. (Def)二元二次方程式圖形的第一個判別式 $\delta = b^2 - 4ac$ 。

   (Thm)一個二元二次方程式 $\Gamma: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，則

   (1) $\delta = 0$ 為拋物線類

   (2) $\delta > 0$ 為雙曲線類

   (3) $\delta < 0$ 為橢圓類

   [note]所以有時候我們稱雙曲線為正類曲線；橢圓為負類曲線。

   (pf)

   令旋轉 θ 角以後消去 xy 項係數，即 $\cot 2\theta = \dfrac{a-c}{b}$，接下來我們先證明第二個旋轉不變量，

$$
\begin{aligned}
b'^2 - 4a'c' &= [(c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta]^2 \\
&\quad -4[a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta][a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta] \\
&= [(c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta]^2 \\
&\quad -4[a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\frac{\sin 2\theta}{2} + c\frac{1-\cos 2\theta}{2}][a\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\frac{\sin 2\theta}{2} + c\frac{1+\cos 2\theta}{2}] \\
&= [(c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta]^2 - [(a+c)+(a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta][(a+c)-(a-c)\cos 2\theta] \\
&= [(c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta]^2 - [(a+c)^2 - ((a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta)^2] \\
&= \underline{(a-c)^2\sin^2 2\theta} + \underline{\underline{b^2\cos^2 2\theta}} + \cancel{2b(c-a)\sin 2\theta\cos 2\theta} \\
&\quad -(a+c)^2 + \underline{(a-c)^2\cos^2 2\theta} + \underline{\underline{b^2\sin^2 2\theta}} + \cancel{2b(a-c)\sin 2\theta\cos 2\theta} \\
&= b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2 = b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

   所以 $b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac$ ，又因為已經消去 xy 項係數，所以 $b^2 - 4ac = -4a'c'$ ，

   又 $\begin{cases} -4a'c' = 0 \Rightarrow a'c' = 0 \Rightarrow \text{拋物線類} \\ -4a'c' > 0 \Rightarrow a'c' < 0 \Rightarrow \text{雙曲線類} \\ -4a'c' < 0 \Rightarrow a'c' > 0 \Rightarrow \text{橢圓類} \end{cases}$ ，因此我們完成了這個證明。

   接下來我們要介紹另外一個二元二次方程式的判別式

   (Def)二元二次方程式圖形的第一個判別式 $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ 。

   [note] δ 是判斷二元二次方程式圖形的類型；

   Δ 是判斷二元二次方程式圖形的退化情形。

   我們下面只討論有心錐線得情形，來找出 Δ 如何判斷圖形退化

一個二元二次方程式$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$為有心錐線，即$b^2-4ac\neq 0$

於是我們先移軸將原點移到中心(h,k)，即(h,k)為方程組$\begin{cases}2ah+bk+d=0\\ bk+2ck+e=0\end{cases}$的解，

所以$h=\dfrac{\begin{vmatrix}-d & b\\ -e & 2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}, k=\dfrac{\begin{vmatrix}2a & -d\\ b & -e\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}$，而將原點平移至$(h,k)$後二元二次方程式變成

$\Gamma': ax'^2+bx'y'+cy'^2+(ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f)=0$

其中$ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f=\dfrac{1}{2}(2ah^2+2bhk+2ck^2+2dh+2ek+2f)$

$$=\frac{1}{2}[h(2ah+bk+d)+k(bh+2ck+e)+dh+ek+2f)=\frac{1}{2}(dh+ek+2f)$$

$$=\frac{1}{2}(d\frac{\begin{vmatrix}-d & b\\ -e & 2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}+e\frac{\begin{vmatrix}2a & -d\\ b & -e\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}+2f)=\frac{1}{2}(d\frac{d\begin{vmatrix}-d & b\\ -e & 2c\end{vmatrix}+e\begin{vmatrix}2a & -d\\ b & -e\end{vmatrix}+2f\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{d\begin{vmatrix}b & d\\ 2c & e\end{vmatrix}-e\begin{vmatrix}2a & d\\ b & e\end{vmatrix}+2f\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}})=\frac{1}{2}(\frac{\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{\delta}$$

即$\Gamma': ax'^2+bx'y'+cy'^2=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta}$，再來轉軸消去$xy$項，但是常數項為旋轉不變量，所以

$\Gamma'': a''x''^2+c''y''^2=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta}$，其中$a''+c''=a+c$，

(1)雙曲線類，即$a''\cdot c''<0\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta}\neq 0\Rightarrow\Delta\neq 0\Rightarrow \text{雙曲線}\\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta}=0\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow \text{兩相交直線}\end{cases}$

(2)橢圓類，即$a''\cdot c''>0\Rightarrow\begin{cases}(a''+c'')(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta})=0\Rightarrow(a+c)\Delta=0\Rightarrow a\cdot\Delta=0\Rightarrow \text{一點}\\ (a''+c'')(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta})>0\Rightarrow(a+c)\Delta<0\Rightarrow a\cdot\Delta<0\Rightarrow \text{橢圓}\\ (a''+c'')(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Delta}{\delta})<0\Rightarrow(a+c)\Delta>0\Rightarrow a\cdot\Delta>0\Rightarrow \text{無圖形}\end{cases}$

最後我們把這些東西歸納整理成下一頁表格

2. 圖形的判斷法則：

$\delta=0$	$\delta>0$	$\delta<0$
有心錐線	無心錐線	
零類錐線	正類錐線	負類錐線
所以 Γ 可以重寫成 $(\sqrt{a}x+\sqrt{c}y)^2+dx+ey+f=0$ 1.若 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\neq\frac{d}{e}$ 圖形為拋物線 2.若 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{d}{e}$ Γ 可以再寫成 $(\sqrt{a}x+\sqrt{c}y)^2+k(\sqrt{a}x+\sqrt{c}y)+f=0$ $\begin{cases}k^2-4f>0\Rightarrow\text{兩平行直線}\\k^2-4f=0\Rightarrow\text{兩重合直線}\\k^2-4f<0\Rightarrow\text{無圖形}\end{cases}$	1. $\Delta=0\Rightarrow$ 兩相交直線 2. $\Delta\neq0\Rightarrow$ 雙曲線	1. $\Delta=0\Rightarrow$ 一點 2. $\Delta\neq0$ (1) $(a+c)\Delta<0\Rightarrow$ 橢圓 (2) $(a+c)\Delta>0\Rightarrow$ 無圖形

3. 題目如果要找出移軸轉軸過後的方程式

1. $\delta=0\Rightarrow$ 直接轉軸，因為為無心錐線無法移軸。

2. $\delta\neq0\Rightarrow$ 先移軸，即中心移至原點；再轉軸。

(一)移軸整理

$\Gamma: f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

解 $\begin{cases}2ah+bk+d=0\\bh+2ck+e=0\end{cases}$　[記憶] $\begin{cases}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(h,k)}=0\\\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(h,k)}=0\end{cases}$

解得 (h,k) 就是此有心錐線的中心，而將原點移至 (h,k) 的新方程式

$\Gamma': ax'^2+bx'y'+cy'^2+(ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f)=0$

(二)轉軸整理

先判斷轉軸角度$\cot 2\theta=\dfrac{a-c}{b}\Rightarrow \cos 2\theta \Rightarrow \begin{cases}\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}\\ \cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}\end{cases}$

(1)無心錐線$(\delta=0)$

直接轉軸a',c'滿足$\begin{cases}a'+c'=a+c\\ a'-c'=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}\text{(正負號由}b\text{決定)}\end{cases}$；

d',e'滿足$\begin{bmatrix}d'\\e'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d\cos\theta+e\sin\theta\\ -d\sin\theta+e\cos\theta\end{bmatrix}$。

(2)有心錐線$(\delta\neq 0)$

先移軸先 x 項和 y 項即新的方程式變成$\Gamma': ax^2+bxy+cy^2+f'=0$

轉軸a'',c''滿足$\begin{cases}a''+c''=a+c\\ a''-c''=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}\text{(正負號由}b\text{決定)}\end{cases}$

最後$\Gamma'': a'x^2+c'y^2+f'=0$，便可以取的錐線的輪廓。

4. 由旋轉平移後的方程式求原方程式的特徵：

①$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x''\cos\theta-y''\sin\theta\\ x''\sin\theta+y''\cos\theta\end{bmatrix}$。

②$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\cos\theta+y'\sin\theta\\ x'\sin\theta-y'\cos\theta\end{bmatrix}$。

③$\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k\end{cases}$。

④$\begin{cases}x'=x-h\\ y'=y-k\end{cases}$。